

Copules et mesures du risque bidimensionnelles : application pratique aux hedge funds

Rihab BEDOUI* & Makrem BEN DBABIS[†]

Version préliminaire, Septembre 2008

Résumé

A travers la gestion alternative, les gérants développent des modèles de gestion qui visent pour la plupart à jouer sur l'effet de décorrélation. Pour cela, les entreprises utilisent le coefficient de corrélation comme un indicateur de mesure des dépendances qui existent entre les diverses stratégies des hedge funds et un indice action et ces stratégies les unes par rapport aux autres. Les copules sont un outil qui permet de modéliser la structure de dépendance de façon réaliste et moins restrictive prenant mieux en compte les faits stylisés en finance. Cet article présente une mise en oeuvre pratique de la théorie des copules afin de modéliser la dépendance entre les différentes stratégies hedge funds et un indice action et entre ces stratégies les unes par rapport aux autres sur une période normale et une période au cours de laquelle la tendance du marché est baissière. L'approche par les copules nous a permis la détermination des courbes de niveau de la VaR bidimensionnelle et l'étude la dépendance des valeurs extrêmes des stratégies hedge funds et l'indice action via des coefficients de dépendance de queue.

Mots-clefs : Stratégies hedge funds, l'indice action, dépendance, copule, dépendance des queues, Value at Risk bidimensionnelle

*EconomiX, University of Paris X

[†]CNP Insurance, University of Paris IX

1 Introduction

La recherche académique a commencé à s'intéresser aux sources de rendements et de risque des Hedge Funds en 1997. Les précurseurs sont Fung et Hsieh (1997). Brown, Goetzmann et Ibbotson (1999) ont étudié un échantillon de Hedge Funds offshore entre 1989 et 1995 et ils ont trouvé un risque ajusté positif. Leurs résultats n'ont soutenu ni l'effet de différence de talents des gérants, ni celle de la persistance de la performance de certains gérants. D'autres études se sont concentrées sur la performance des Hedge Funds sans prise en compte de la différenciation des facteurs, styles et caractéristiques liés aux rendements anormaux de ces fonds.

A travers la gestion alternative, les gérants développent des modèles de gestion qui visent pour la plupart à jouer sur l'effet de décorrélation. Pour cela, les entreprises disposent d'un indicateur de mesure : le coefficient de corrélation¹. A maintes reprises, Capocci(2004) a soutenu que de nombreuses stratégies hedge funds visent à être faiblement corrélées avec les marchés action et obligataire. Il a étudié la corrélation qui existe entre les diverses stratégies des hedge funds les unes par rapport aux autres afin de déterminer lesquelles sont les plus proches. Il a montré que la corrélation entre les stratégies hedge funds et les indices varie fortement d'une stratégie à l'autre et entre une même stratégie et les divers indices. L'ensemble des stratégies (sans considérer la stratégie short selling) est corrélé positivement avec les indices actions mais que les indices mortgage backed, equity market et multi strategy ne le sont que très faiblement corrélés. Toutes les stratégies sont peu ou pas corrélées avec les indices obligataires et l'indice de matières premières. L'indice high yield est cependant plus fortement corrélé avec la plupart des indices.

La stratégie short selling est négativement corrélé avec la plupart des indices. A titre de comparaison, Capocci(2004) a étudié les corrélations basé uniquement sur la sous-période janvier 2000-décembre 2002 (marché baissier) et il a remarqué que les corrélations moyennes ont en général tendance à diminuer par rapport à la période 'normale' même si ce n'est pas le cas pour tous les indices (short selling ou emerging market par exemple) Capocci et Hübner (2003) et Capocci et Mahieu (2003).

Capocci(2004) a constaté que l'indice short selling est négativement corrélé avec l'ensemble des autres stratégies qu'elle ne l'était avec les indices actions et que les corrélations entre les différentes stratégies individuelles restent sensiblement les mêmes pour les deux périodes. Cependant cette mesure de dépendance souvent utilisée par les praticiens possède plusieurs limites à savoir que le coefficient de corrélation n'est pas défini si les moments d'ordre 2 des variables aléatoires ne sont pas finis. De plus, un coefficient de corrélation nul n'implique pas nécessairement l'indépendance entre les variables étudiées. En outre on ne peut mesurer qu'une corrélation linéaire. Ajoutons à cela que le coefficient de corrélation linéaire n'est pas invariant par une transformation croissante et continue² et il ne tient pas compte de la dépendance des valeurs extrêmes.

L'étude des comouvements entre les stratégies hedge funds d'une part et les comouvements entre ces stratégies et l'indice action d'autre part n'a été analysé qu'en utilisant le coefficient de corrélation. Cet article présente une mise en oeuvre pratique de cette problématique en utilisant la théorie des copules.

La finalité du présent travail est de modéliser la structure de dépendance entre les rendements

¹ mesure standardisée de la dépendance de deux variables. La valeur des coefficients de corrélation est comprise obligatoirement entre -1 et 1. Plus le coefficient sera proche de 1 ou -1, plus les variables seront fortement corrélés

²(la fonction logarithme, Embrechts et al[1999])

des différentes stratégies hedge funds, la structure de dépendance entre les rendements de ces stratégies et le rendement de l'indice action sur deux périodes : une période "normale" et une période représentant la survenance d'un événement rare et extrême (cas où la tendance du marché est baissière) ainsi que la modélisation adéquate de la dépendance des queues de ces différentes variables à travers le calcul des mesures de dépendance extrêmes . De plus, nous nous sommes intéressés à la détermination des courbes de niveau de la VaR bidimensionnelle entre différents stratégies Hedge funds.et à la détermination du taux marginal de substitution (TMS) entre les VaR des deux stratégies hedge funds et les VaR d'une stratégie hedge funds particulière et l'indice action pour un niveau de risque donné et ce en utilisant la théorie des copules.

Notre objectif est donc la mise en oeuvre et la calibration de la modélisation de la dépendance des hedges funds sur une période normale et une période de crise et d'étudier l'impact de cette modélisation sur différents mesures de risque sans faire des hypothèses restrictives sur la linéarité et la monotonie de ces séries ainsi que d'étudier la dépendance des valeurs extrêmes des stratégies hedge funds et l'indice action à travers des coefficients de dépendance de queue.

Les copules constituent un outil statistique qui présente de nombreux avantages. La dépendance entre les séries n'a aucune raison a priori d'être linéaire, encore moins monotone. Le plus significatif est que les marchés semblent plus dépendants en périodes de crash qu'en période normale, traduisant ainsi une dépendance en queues. Les fonctions copules permettent de déterminer la nature de dépendance des séries qu'elle soit linéaire ou pas, monotone ou pas. En plus du fait qu'elles présentent une grande souplesse dans la mise en oeuvre de l'analyse multivariée, les copules autorisent une sélection plus entendue des distributions jointes des séries financières. Les fonctions copules permettent une représentation moins naïve de la dépendance statistique en finance fondée sur la mesure traditionnelle de corrélation(Embrechts et al.(1999)). En plus, elles autorisent des distributions de probabilités jointes moins restrictives qui permette de mieux prendre en compte les faits stylisés en finance (leptokurticité, asymétrie, dépendance des queues). Elles permettent la prise en compte des distributions multidimensionnelles assez générales et ce indépendamment des lois des marginales qui peuvent avoir des lois différentes et quelconques ce qui permet de s'affranchir de certains hypothèses peu réalistes faites dans les études empiriques.

En outre, l'approche par les copules nous permet d'alléger la mise en oeuvre des modèles multivariés. En effet, cette approche par les copules permet une décomposition de la loi multidimensionnelle en ses marginales univariées et en une fonction de dépendance permettant de rendre possible des extensions de certains résultats obtenus dans le cas univarié au cas multivarié. La copule est donc une statistique exhaustive de la dépendance.

Pour atteindre cet objectif, la première partie sera consacrée à la théorie des copules. On essaiera de prime à bord de donner une définition précise aux copules. Nous faisons ensuite un bref survol sur les principales propriétés des copules. Puis, nous présenterons les méthodes d'estimation du paramètre des copules et on décrira les tests d'adéquation permettant de sélectionner la copule la mieux adaptée à la modélisation.

La deuxième partie abordera l'aspect pratique de notre travail. Nous entamons cette partie par présenter les données des hedge funds étudiées. On mettra en évidence un certain nombre de dépendances entre l'indice action et les diverses stratégies hedge funds entre et ainsi que les dépendances qui existent entre ces stratégies les unes par rapport aux autres. On sélectionnera les copules les représentant le mieux sur deux périodes différentes : une période 'normale' et une période pendant laquelle la tendance du marché est baissière. En plus, cette modélisation des dépendances via les copules nous permettra de tracer les courbes de niveau de la VaR bidimen-

sionnelle pour un niveau de risque donné entre les stratégies hedge funds. En dernier lieu, on évaluera les dépendances des valeurs extrêmes entre l'indice action, l'indice hedge funds et la stratégie dedicated short à travers divers coefficients de dépendance de queue qu'on explicitera.

2 Dépendance et copules

Une copule est **une distribution uniforme multidimensionnelle**. C'est un outil statistique relativement ancien introduit par *Sklar[1959]* remis au goût du jour par *Genest et Mackay [1986]*. "Copulas are functions that join or couple multivariate functions to their one dimensional margins"³. Copulas are distribution functions whose one dimensional margins are uniform⁴.

Mais les deux dernières phrases ne constituent pas une définition appropriée des copules. Dans ce qui suit et en référence à l'ouvrage de **Nelsen (1998)**, **Genest & MacKay (1986)**, **Denuit & Charpentier (2004)**, on essayera de donner une définition précise aux copules, on examinera quelques propriétés élémentaires ainsi que les méthodes d'estimation du paramètre des copules et on décrira les tests d'adéquation permettant de sélectionner la copule la mieux adaptée aux données.

2.1 Définition d'une copule bidimensionnelle

Une copule bivariée est une fonction 2 – *croissante* sur chacun de ses arguments notée C de domaine $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$. Formellement, il s'agit d'une fonction $C : I^2 \rightarrow I$ présentant les propriétés suivantes :

– Pour tout $u, v \in I$,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \text{ et } C(u, 1) = u, C(1, v) = v$$

– Pour tout u_1, u_2, v_1 et $v_2 \in I$ tels que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$, on a :

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Donc :

$$\Delta_{u_1}^{u_2} \Delta_{v_1}^{v_2} C(x, y) \geq 0$$

2.2 Propriétés des copules

2.2.1 Théorème de Sklar

Soit H une fonction jointe avec les marginales F et G , il existe une copule C tels que pour tout $x, y \in \bar{R}$:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y))$$

Si F et G sont continues alors C est unique. \Rightarrow Ce théorème permet d'associer à chaque distribution bidimensionnelle une copule.

³Roger B.Nelsen, An Introduction to copulas, Springer 1998.

⁴Roger B.Nelsen, An Introduction to copulas, Springer 1998.

2.2.2 Propriété d'Invariance

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires continues dont les marginales sont F_1 et F_2 , liées par une copule C . Soient h_1 et h_2 deux fonctions strictement croissantes, alors : $C(F_1(h_1(x_1)), F_2(h_2(x_2))) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$

2.2.3 Théorème 1 (les bornes de Fréchet)

Soit C une copule bivariée, alors pour tout $(u, v) \in \text{Dom } C$, on a :

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$$

2.2.4 Théorème 2

Soit C une copule, pour tout $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \text{Dom } C$ on a :

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_1 - v_2| + |u_1 - v_1|$$

Pour tout $a \in I$ on a :

- ♣ $t \mapsto C(t, a)$ est non décroissante : Section horizontale de C en a
- ♣ $t \mapsto C(a, t)$ est non décroissante : Section verticale de C en a

2.3 Estimation de la structure de dépendance

"En pratique lors de la mise en oeuvre d'un modèle intégrant des copules il convient d'être capable d'estimer la structure de dépendance, à partir des données disponibles"⁵.

Ce paragraphe présente les principales méthodes permettant d'estimer le paramètre de la copule.

2.3.1 Estimation non paramétrique

La fonction de répartition empirique Soit (x_1, \dots, x_n) un échantillon de taille n de loi F . La fonction de répartition empirique est donc définie par :

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_i \leq x)}$$

En dimension n , si on se donne n -échantillons de taille n $(X_1^k, \dots, X_n^k)_{k=1, \dots, n}$ d'un vecteur X , on peut généraliser l'expression de la fonction de répartition empirique comme suit :

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{(X_1^i \leq x_1, \dots, X_n^i \leq x_n)}$$

Cet estimateur conduit à un estimateur non paramétrique naturel d'une copule.

⁵F.Planchet (2006), Introduction à la théorie des copules, ISFA.

La copule empirique Les copules empiriques ont été initialement introduites par **Deheuvels (1979)** et connue sous l'appellation *Fonction empirique de dépendance*.

Cas des copules bivariées :

Soient $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ un échantillon de taille n de couples de variables aléatoire. La copule empirique est donc la fonction C_n définie par :

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{\text{Nombre des paires } (x, y) \text{ dans l'échantillon tels que } x \leq x_i, y \leq y_j}{n}$$

La fonction densité empirique de la copule C notée c est donnée par :

$$c_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } (x_i, y_j) \text{ est un élément de l'échantillon.} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note que la relation entre C_n et c_n est définie par :

$$C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \sum_{p=1}^i \sum_{q=1}^j c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right)$$

$$c_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - C_n\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) - C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) + C_n\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right)$$

Généralisation dans les cas des copules multivariées

Pour un échantillon de taille n , $(x_1^k, \dots, X_n^k)_{k=1, \dots, n}$, la copule empirique est définie de façon analogue au cas bivarié, C_n est donc définie comme suit :

$$c_n\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{(x_1^k \leq k_1, \dots, x_n^k \leq k_n)}$$

Les copules empiriques sont notamment utiles pour fournir des estimateurs non paramétriques de mesures de dépendance à savoir le ρ de Spearman, le τ de Kendall. . .

Proposition Soient C_n et c_n respectivement la copule empirique et la fonction densité empirique d'un n - échantillon $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$. Alors, le ρ de Spearman et le τ de Kendall sont déterminés empiriquement comme suit :

$$\widehat{\rho} = \frac{12}{n^2 - 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(C_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{i}{n} - \frac{j}{n} \right)$$

$$\widehat{\tau} = \frac{2n}{n-1} \sum_{p=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{j-1} \left(c_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{n}\right) - c_n\left(\frac{i}{n}, \frac{q}{n}\right) c_n\left(\frac{p}{n}, \frac{j}{n}\right) \right)$$

Pour la démonstration de cette proposition, voir **Nelsen (1998)**, **Deheuvels (1979)**.

2.3.2 Estimation paramétrique et semi-paramétrique

Lorsqu'il s'agit d'une estimation paramétrique, il est naturel que la distribution conjointe dépend d'un paramètre ou d'un ensemble de paramètres que l'on cherche à estimer.

Méthode des moments Cette méthode est notamment utilisée pour les mesures de dépendance ; l'estimateur des moments de la mesure de dépendance considérée est alors simplement obtenu en égalant l'expression paramétrique (analytique) de la mesure avec un estimateur non paramétrique de cette même mesure. L'estimateur déterminé par cette méthode n'est pas robuste. Dans la pratique et pour simplifier les calculs, le tau de Kendall constitue le plus souvent l'estimateur du paramètre de la copule.

Méthode de maximum de vraisemblance Soit $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, donc, par dérivation on peut obtenir la fonction densité du vecteur (X_1, \dots, X_n) définie par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

Avec c la densité de la copule C comme définie précédemment,

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n}$$

La fonction log-vraisemblance de l'échantillon $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{k=1, \dots, n}$ est donc définie par :

$$l(\theta) = \ln \left(c(F_1(x_1^k, \theta), \dots, F_n(x_n^k, \theta)) \right) + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \log(f_i(x_i^k, \theta))$$

Il faut donc maximiser cette fonction en θ , ce qui peut s'avérer pénible en pratique. La méthode du maximum de vraisemblance peut engendrer des temps de calcul très longs pour une copule multidimensionnelle car l'estimation des paramètres des lois marginales et des paramètres de la copule se fait d'une façon simultanée. En outre, une éventuelle erreur d'estimation des marginales peut rendre erronée l'estimation de la copule car elles interviennent directement dans la fonction vraisemblance.

La méthode IFM Shih & Louis (1995) ont proposé une méthode d'estimation permettant de découper le problème d'estimation en deux étapes,

- L'estimation des paramètres $\theta_1, \dots, \theta_n$ des marginales,
- L'estimation du paramètre θ_C de la copule.

Cette méthode est connue sous le nom de méthode *IFM*.

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, \theta_C)$$

On commence par déterminer les estimateurs de maximum de vraisemblance des marginales, soit :

$$\widehat{\theta}_i = \operatorname{argmax}_{\theta_i} \sum_{k=1}^n f_i(x_i^k, \theta_i)$$

On introduit alors ces estimateurs dans la partie copule de la fonction log-vraisemblance, ce qui conduit à :

$$\theta_C = \operatorname{argmax}_{\theta_C} \sum_{k=1}^n \ln \left(c \left(F_1(x_1^k, \widehat{\theta}_1), \dots, F_1(x_n^k, \widehat{\theta}_n), \theta_C \right) \right)$$

D'autres procédures peuvent être imaginées, comme par exemple l'estimation non paramétrique des marginales suivi d'un maximum de vraisemblance pour le paramètre de la copule (procédure *omnibus* de **Genest et al (1995)** ou **Shih et Louis (1995)**). Cette méthode présente l'avantage de reposer sur des calculs plus légers que ceux de la méthode du maximum de vraisemblance. Néanmoins la détermination de la matrice d'information de Godambe peut être très compliqué car elle engendre des multiples calculs de dérivées. Pour les mêmes raisons que pour la méthode du maximum de vraisemblance, une éventuelle erreur d'estimation des marginales par cette méthode peut rendre erronée l'estimation de la copule.

Méthode CML Canonical Maximum Likelihood Cette méthode, recommandée par **Bouye et al. (2000)**, est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Pour cela, les observations $(x_1^k, \dots, x_n^k)_{k=1, \dots, K}$ sont transformées en uniformes $(\widehat{u}_1^k, \dots, \widehat{u}_n^k)_{k=1, \dots, K}$ en utilisant les fonctions de répartition empirique univariées et en estimant le paramètre comme suit :

$$\widehat{a} = \operatorname{argmax} \sum_{k=1}^K \log \left(C(\widehat{u}_1^k, \dots, \widehat{u}_n^k) \right)$$

Cette méthode génère des temps de calcul limités ainsi qu'elle procède à une estimation paramétrique de la copule indépendamment de la forme paramétrique des lois marginales.

On utilisera la méthode IFM qui présente le grand avantage de procéder à une estimation paramétrique⁶ de la copule dans notre application ainsi que pour les avantages que présente cette méthode et qu'on a évoquées plus haut.

2.4 Test d'adéquation & choix de copules

le choix de la meilleure copule permettant de modéliser le mieux la dépendance entre ces variables aléatoires est d'importance capitale. La question qui se pose est, quelle est la meilleure structure de dépendance pouvant être adaptée au phénomène étudié ?

Cependant, les tests d'adéquation pour les copules sont relativement récents. Il est à signaler qu'on retrouve peu d'articles sur le sujet, mais le domaine est en constant développement.

Soit un échantillon de vecteurs aléatoires iid $X_i \in \mathbb{R}^d$ avec $X_i = (X_{1,i}, \dots, X_{d,i}) \sim X$ iid. Soit H la fonction de répartition de X et soit C la copule de X donc :

⁶Pour accélérer la maximisation du programme, il est conseillé de partir d'une valeur initiale de a égale à celle qui découle de l'estimateur des moments.

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))$$

Généralement, un test statistique distingue entre deux hypothèses :

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &: \text{Hypothèse nulle } H = H_0 \text{ ou bien } C = C_0 \\ \mathfrak{H}_a &: \text{Hypothèse alternative } H \neq H_0 \text{ ou bien } C \neq C_0 \end{aligned}$$

Une première solution peu puissante consiste à comparer graphiquement la copule empirique définie d'une façon similaire à la section 2.3.1 par :

$$\widehat{C}\left(\frac{k_1}{n}, \dots, \frac{k_p}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{card}\{i \mid R_{1,i} \leq k_1, \dots, R_{p,i} \leq k_p\}$$

et la copule paramétrique estimée C , avec $R_{j,i}$, $j = 1, \dots, p$ & $i = 1, \dots, n$ dénote le rang de $X_{j,i}$ parmi les observations $X_{j,1}, \dots, X_{j,n}$. La dépendance retenue est donc celle qui assure que C soit la plus proche possible de \widehat{C} .

2.4.1 Approche de Genest & Rivest : Processus de Kendall & adéquation graphique

Genest & Rivest (1993) ont introduit le processus de Kendall pour l'utiliser comme outil de sélection de copules archimédiennes. Ce dernier est défini par :

$$\mathbb{K}_n(t) = \sqrt{n}(K_n(t) - K(t)) \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

Avec $K(t)$ la fonction de Kendall définie par :

$$K(t) = P(F(X_1, \dots, X_p) \leq t) = P(C(F_1, \dots, F_p) \leq t) = P(W \leq t)$$

Cette fonction est aussi appelée la fonction de répartition de la transformation intégrale de probabilité $W = F(X_1, \dots, X_p) = C(U_1, \dots, U_p)$ en remplaçant F_j par U_j pour $j = 1, \dots, p$ associée au vecteur (X_1, \dots, X_p) de loi F , de marginales F_1, \dots, F_p et une copule C . Alors que $K_n(t)$ est la fonction de Kendall empirique ou en d'autre terme la version empirique de la de la loi de Kendall définie ci-dessus,

$$K_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(W_i \leq t)} \quad \forall 0 \leq t \leq 1$$

Pour chaque $i = 1, \dots, n$ on a

$$W_i = F_n(X_{1,i}, \dots, X_{p,i})$$

$$F_n(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(X_{1,i} \leq x_1, \dots, X_{p,i} \leq x_p)}$$

Le processus de Kendall proposé par **Genest et Rivest (1993)** a l'avantage d'être de dimension 1, ce qui facilite le choix de la meilleure copule. **Dakhli (2003)**⁷ présente une étude permettant de choisir graphiquement la meilleure structure de dépendance.

Cette approche souffre de plusieurs limites qui résident dans le fait qu'elle était fondée exclusivement sur la valeur observée de la norme L^2 et aucun test d'adéquation formel n'est élaboré. **Barbe al (1996)** ont étudié plus à fond le processus de Kendall. Mais l'idée de tester l'adéquation d'une copule en utilisant ce processus a été développée par **Wang Wells (2000)**. Ces derniers ont étudié une méthode non paramétrique pour des données censurées applicable dans le cas des copules archimédiennes bivariées.

Leur test est basé sur une version tronquée du processus de Kendall défini par :

$$S_{\xi n} = \int_{\xi}^1 (\mathbb{K}_n(t))^2 dt, \text{ avec } \xi > 0$$

Cette statistique est une fonction continue du processus de Kendall défini ci-dessus. Pour éliminer les difficultés pratiques issues des problèmes des censures de la densité $k(\theta, \cdot)$ du processus de Kendall $K(\theta, \cdot)$, la statistique de Wang et Wells présente un seuil $\xi > 0$. En suivant l'approche de **Barbe et al (1996)**, ils étaient capable d'identifier la limite de \mathbb{K}_n et donc de $S_{\xi n}$ même en présence des censures. Cependant, la méthode de Bootstrap paramétrique laisse apparaître un biais pour l'approximation de la variance de $S_{\xi n}$, donc, **Wang et Wells (2000)** recommandent que le choix de la copule parmi la famille archimédienne des copule soit basé sur une comparaison des valeurs non traitées de $S_{\xi n}$.

2.4.2 Approche de Genest, Quessy et Rémillard (2006)

Genest, Quessy & Rémillard (2006) ont élargi les travaux de **Wang et Wells (2000)** en proposant des statistiques alternatives à la statistique $S_{\xi n}$ données par :

$$S_n = \int_0^1 |\mathbb{K}_n(t)|^2 k(\theta_n, t) dt \text{ avec } k(\theta_n, t) \text{ densité associée } K(\theta, t)$$

$$T_n = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\mathbb{K}_n(t)|$$

La statistique S_n est fondée sur la distance de Cramèr Von Mises, alors que la statistique T_n est basée sur celle de Kolmogorov Smirnov. Il est important à signaler que ces statistiques présentent plusieurs avantages :

- Des formules simples sont disponibles pour S_n et T_n en terme de rang d'observations ce qui n'est pas le cas avec la statistique de **Wang et Wells (2000)**.

- Les procédures de choix ne sont pas influencées par une constante externe ξ dont la sélection et l'influence sur la distribution limite de $S_{\xi n}$ n'ont pas été étudiées par **Wang et Wells (2000)**.

⁷**Dakhli T. (2003)**, *Analyse de la dépendance de défaut et évaluation des dérivés de crédit sur portefeuille*, mémoire présenté à HEC Montréal.

- La distribution de S_n et T_n peuvent être déterminées non seulement pour les copules archimédiennes bivariées mais aussi pour les copules à dimension supérieure à 2 et pour les copules générales satisfaisant la condition de régularité.

- La méthode de bootstrap paramétrique est valide et peut être utilisée pour approximer les P-values associées aux fonctionnelles de \mathbb{K}_n et en particulier avec S_n et T_n .

En effectuant un bootstrap paramétrique des statistiques S_n et T_n , il est possible d'obtenir des seuils approximatifs associés à ces statistiques pour des hypothèses du genre $C \in (C_\theta)$, c'est-à-dire du type : la copule C associée à F appartient à la famille de copules (C_θ) . Dans le document de travail de **Genest et Rémillard (2006)**, on confirme la validité de cette approche par bootstrap pour les deux types de tests d'adéquation les plus fréquents, soit ceux où l'on compare la distance entre une distribution multivariée empirique et son estimation paramétrique sous l'hypothèse nulle, ou encore ceux où l'on compare la distance entre les estimations empiriques et paramétriques de pseudoobservations univariées telles que les W_i , obtenues grâce à la transformation intégrale de probabilité.

Genest et al (2006) ont démontré que :

$$S_n = \frac{n}{3} + n \sum_{i=1}^{n-1} K_n^2\left(\frac{j}{n}\right) \left(K\left(\theta_n, \frac{j+1}{n}\right) - K\left(\theta_n, \frac{j}{n}\right) \right) \\ - n \sum_{j=1}^{n-1} K_n\left(\frac{j}{n}\right) \left(K^2\left(\theta_n, \frac{j+1}{n}\right) - K^2\left(\theta_n, \frac{j}{n}\right) \right) \\ T_n = \sqrt{n} \max_{i=0,1 \text{ \& } 0 \leq j \leq n-1} \left(\left| K_n\left(\frac{j}{n}\right) - K\left(\theta_n, \frac{j+1}{n}\right) \right| \right)$$

Leur test consiste à rejeter l'hypothèse nulle $H_0 : C \in \mathfrak{C}$ quand les valeurs observées de S_n et T_n soient supérieures aux quantiles d'ordre $1 - \alpha$ de leurs distributions sous l'hypothèse H_0 .

La méthode de bootstrap paramétrique dans l'approche de Wang et Wells (2000) Pour trouver un estimateur de la variance de leur statistique $S_{\xi n}$, **Wang et Wells (2000)** proposent de générer un échantillon $V_{1,n^*}, \dots, V_{n,n^*}$ avec $V_{j,n^*} \sim K(\theta_n, \cdot)$ avec $j = 1, \dots, n$ et calculer ensuite :

$$K_n^*(v) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n 1_{(V_{j,n^*} \leq v)} \\ \tau_n^* = -1 + \frac{4}{n} \sum_{j=1}^n V_{j,n^*} \\ \theta_n^* = \tau^{-1}(\tau_n^*) \\ S_{\xi n^*} = n \int_{\xi}^1 (K_n^*(v) - K(\theta_n^*, v))^2 dv$$

On répète cette procédure N fois, on aura $S_{\xi_{n,1}^*}, \dots, S_{\xi_{n,N}^*}$. **Wang et Wells (2000)** suggèrent que la variance de S_{ξ_n} est celle obtenue en calculons la variance des $S_{\xi_{n,1}^*}, \dots, S_{\xi_{n,N}^*}$. Mais cet algorithme n'est pas correcte comme le démontre **Genest et al (2006)**.

Le processus de Kendall bootstrappé $\sqrt{n}(\mathbb{K}_n - K(\theta_n, \cdot))$ converge dans $D_{[0,1]}$ vers une limite K^* qui est indépendante de K mais généralement différente en loi.

Par conséquent, ce bootstrap ne donne ni un estimateur efficace de la variance de S_{ξ_n} , ni un P-Value correcte pour effectuer le test d'adéquation. Ce qui fait que le test proposé par **Wang et Wells (2000)** soit irroné.

La méthode de Bootstrap paramétrique basée sur C_{θ_n} Cette méthode va permettre d'appliquer un test d'adéquation en trois étapes.

La première étape consiste à estimer le paramètre θ de la copule par un estimateur consistant comme l'on a déjà étudié.

A la deuxième étape, on doit générer N échantillons de taille n de loi C_θ et pour chacun de ces échantillons, estimer le paramètre θ par la même méthode et déterminer la valeur de la statistique du test.

En fin, on ordonne par ordre croissant les statistiques de test calculées à la base des échantillons simulés notée S_n

$$S_n = S_{1:N^*} \leq \dots \leq S_{N:N^*}$$

Donc, en se basant sur la statistique S_n un estimateur de la valeur critique du test à un seuil de risque α est donnée par

$$S_{[(1-\alpha)N]:N^*}$$

La valeur de la probabilité de la valeur critique est donnée par

$$\frac{j}{N} \text{ avec } j \mid S_j^* \geq S_n$$

L'hypothèse H_0 est retenue si et seulement si la probabilité associée à la valeur critique sera supérieure au seuil de risque fixé au niveau α . Pour plus de détails sur cette approche, on invite le lecteur à consulter **Genest et Rémillard (2005)**.

2.4.3 Test d'adéquation des copules basé sur la transformation intégrale de Roseblatt : old fashion

La transformation intégrale de **Roseblatt (1952)** d'une copule C est une application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{R} : (0,1)^d \rightarrow (0,1)^d \\ u = (u_1, \dots, u_d) \mapsto \mathfrak{R}(u) = (e_1, \dots, e_d) \end{array} \right.$$

Avec $e_1 = u_1$ et pour $i = 2, \dots, d$ on a :

$$e_i = \frac{\frac{\partial^{i-1} C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)}{\partial u_1 \dots \partial u_{i-1}}}{\frac{\partial^i C(u_1, \dots, u_i, 1, \dots, 1)}{\partial u_1 \dots \partial u_i}}$$

La transformation intégrale de **Roseblatt (1952)** possède la propriété telle que $U \sim C_\theta$ si et seulement si :

$$\mathfrak{R}(U) = C^\perp(e_1, \dots, e_d) = e_1 \times \dots \times e_d \text{ avec } e_1, \dots, e_d \in [0, 1]^d$$

Donc $H_0 : U \sim C \in C_0$ est équivalente à $H_0 : \mathfrak{R}_\theta(U) \sim C^\perp$.

Pour tester cette hypothèse, on peut utiliser le fait que sous H_0 , les pseudo-observations $E_1 = \mathfrak{R}_\theta(U_1), \dots, E_n = \mathfrak{R}_\theta(U_n)$ peuvent être interprétés comme un échantillon de copule d'indépendance C^\perp .

Pour illustrer ce test **Breymann et al (2003)** considèrent la fonction de répartition normale standard Φ et $X_i = \sum_{j=1}^d \left(\Phi^{-1}(E_{ij}) \right)^2$, $\forall i = 1, \dots, n$ avec les E_1, \dots, E_n sont approximativement uniformes sur $[0, 1]^d$.

Ils proposent que X_1, \dots, X_n peuvent être interprétés comme un échantillon dérivant d'une fonction de répartition G de Chi-deux de degré de liberté d .

Un estimateur naturel de G est la fonction de répartition empirique de X_1, \dots, X_n définie par :

$$G_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(X_i \leq x)} \quad \forall x \geq 0$$

Ils considèrent ensuite que le processus G_n défini par :

$$G_n = \sqrt{n}(G_n - G)$$

converge asymptotiquement comme si E_1, \dots, E_n sont exactement uniformes. Ils proposent donc de tester l'hypothèse H_0 avec la statistique d'**Anderson-Darling** donnée par :

$$A_n = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) \left(\log(G(X_{(i)})) + \log(1 - G(X_{(n+1-i)})) \right)$$

Avec $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ les statistiques d'ordre de l'échantillon X_1, \dots, X_n .

La P -Value relative à ce test est simplement donnée en référence à la distribution limite de la statistique originale du test d'**Anderson-Darling**.

2.4.4 Test d'adéquation des copules basé sur la transformation intégrale de Roseblatt : new fashion

L'idée de ce test remonte à **Klugman et Parsa (1999)** pour les données bivariées censurées. Ces chercheurs ont proposé la statistique de *Chi-deux de Pearson* calculée à partir les observations E_1, \dots, E_n pour établir leur test d'adéquation. Cependant, la *P - Value* calculée dans ce cas est incorrecte comme le démontre **Genest et al (in press)** car on a supposé que la distribution limite de la statistique en question est celle de Chi-deux alors que ce n'est pas le cas.

Sous l'hypothèse H_0 , la distribution empirique des l'échantillon des E_i est donnée par :

$$D_n(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(E_i \leq u)} \quad \forall u \in [0, 1]^d$$

Avec $E_1, \dots, E_n \sim C^\perp$. Donc, la distance entre D_n et C^\perp permet de mener un test d'adéquation.

Genest et al (in press) se basent sur les distances de **Cramèr Von-Mises** :

$$S_n^{(C)} = n \int_{[0,1]^d} (D_n(u) - C^\perp(u))^2 dD_n(u) = \sum_{i=1}^n (D_n(E_i) - C^\perp(E_i))^2$$

$$S_n^{(B)} = n \int_{[0,1]^d} (D_n(u) - C^\perp(u))^2 du$$

$$= \frac{n}{3^d} - \frac{1}{2^{d-1}} \sum_{i=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - E_{ik}^2) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^d (1 - E_{ikjk})$$

Ces deux statistiques diffèrent uniquement par leur mesure d'intégration. Pour démontrer la convergence des statistiques de **Cramèr Von-Mises** présentées ci-dessus, **Genest et al (in press)** se réfèrent à **Ghoudi et Rémillard (2004)** pour démontrer la convergence asymptotique du processus $\sqrt{n}(D_n - C^\perp)$. Ils ont ensuite utilisé la méthode de Bootstrap paramétrique pour mener ce test sur plusieurs familles de copules. Pour les détails, on invite le lecteur à consulter **Genest et al (in press)**.

Pour notre application, on a utilisé l'approche de Genest, Quessy et Rémillard (2006) afin de sélectionner la copule adéquate à notre modélisation puisqu'elle présente les nombreux avantages qu'on a déjà cité dans un paragraphe précédent.

2.5 La copule de survie

la copule de survie est définie par :

$$\bar{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v).$$

2.6 La copule normale

Soient Φ^{-1} est la fonction inverse de la fonction de répartition d'une loi normale standard et H_α est la fonction de répartition de la loi normale bivariée avec coefficient de corrélation α . La copule normale est définie ainsi :

$$C_\alpha^N(u, v) = H_\alpha(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$$

pour $u, v \in [0, 1]$, $\alpha \in [-1, 1]$.

Il n'y a pas de forme explicite à la fonction de répartition de la loi normale bivariée.

Il existe un grand nombre de classes de copules.

3 Hedge funds et recherche des dépendances

Cette section aborde l'aspect pratique de notre travail. On y présentera les données étudiées. On mettra ensuite en évidence un certain nombre de dépendances entre l'indice action, l'indice hedge funds d'une part et les différents stratégies hedge funds d'autre part et on sélectionnera les copules les représentant le mieux sur deux périodes différentes : une période 'normale' et une période pendant laquelle la tendance du marché est baissière. Le recours aux copules, nous permettra de tracer les courbes de niveau de la VaR bidimensionnelle pour un niveau de risque donné entre les différents stratégies Hedge funds. De plus, on évaluera les dépendances des valeurs extrêmes entre les stratégies Hedge funds via divers coefficients de dépendance de queue qu'on mettra en exergue.

3.1 Analyse exploratoire des données

La période de l'étude s'étend de janvier 1994 à décembre 2006. En ce qui concerne les données des actifs alternatifs, nous disposons de l'historique des rendements des 13 indices mensuels divisés en 2 catégories : un indice global des hedge funds pour toutes les stratégies, et un ensemble de sous indices représentant les 12 stratégies des hedge funds composant la base CSFB/TREMONT exprimés en fréquence mensuelle et sur la base 100. Ces données sont extraites de la base TASS qui comprend environ 2600 fonds et sont couramment utilisées lors de diverses études empiriques.

Selon Fung et Hsieh (2000), ces indices sont moins affectés par le biais du survivant que les données individuelles des fonds. Contrairement aux autres indices, les indices de CSFB/Tremont prennent en considération la rentabilité nette de la commission pondérée par la taille des fonds dans ce panier de fonds. Pour caractériser le marché action, nous allons utiliser l'indice action international (MSCI World).

3.2 Modélisation de la dépendance sur toute la période

On s'intéresse principalement à l'étude de la structure de dépendance entre les indices hedge funds et les indices actions, sur lesquels des études de corrélation ont été faites, sur 2 périodes, période 'normale' et période pendant laquelle la tendance du marché est baissière afin d'étudier la déformation de la structure de la dépendance.

Un test d'adéquation des copules, nous permet de valider le choix de la copule sélectionnée.

La recherche des dépendances porte à la fois sur les différentes stratégies hedge funds et l'indice

action et sur les stratégies hedge funds les unes par rapport aux autres . Une loi de distribution marginale a pu être ajustée pour l'indice action et pour chaque indice hedge funds. La loi normale présente le meilleur ajustement pour les variables à étudier et ce après avoir fait les tests d'ajustement à la loi normale.

On donne ci-dessous un exemple graphique de l'ajustement de la distribution de l'indice action et l'indice hedge funds à une distribution gaussienne en utilisant deux approches graphiques ,sous le progiciel Matlab ,dites respectivement histfit et Quantile-Quantile Plot (QQPlot) . Nous

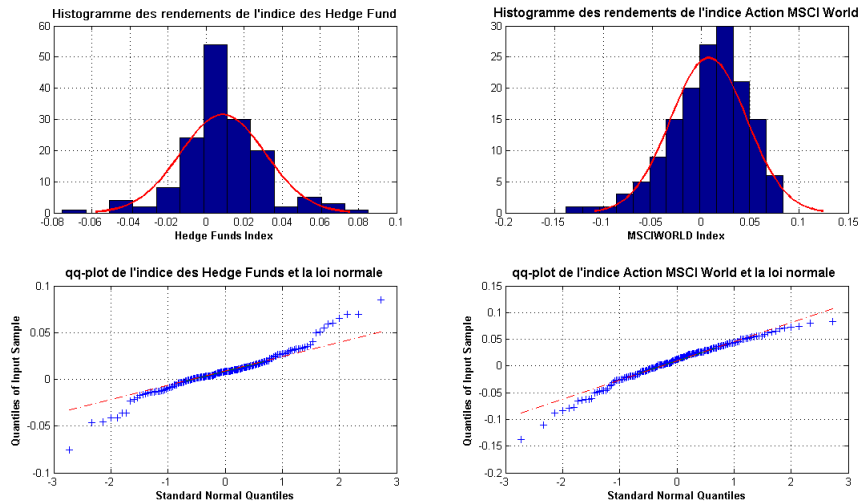


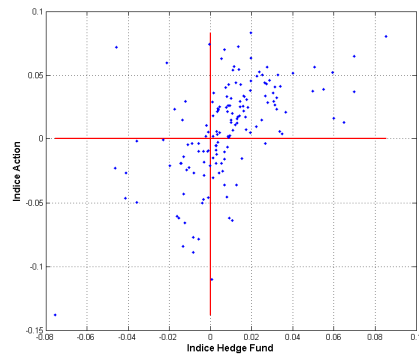
FIG. 1 – Ajustement de la distribution de l'indice action et l'indice hedge funds à une distribution gaussienne

remarquons des valeurs centrales plus "piquées" et des queues de distribution plus épaisses que la courbe de la fonction de densité gaussienne. En fait, la distribution empirique présente des observations rares avec une décroissance plus lente ajustée en puissance alors que la loi normale à une décroissance exponentielle.

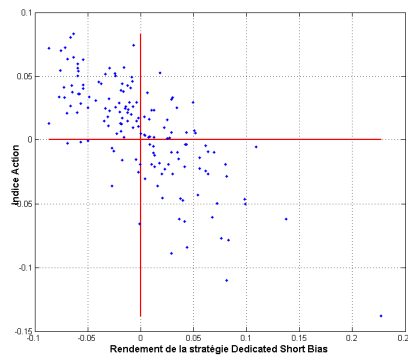
Le choix de la copule représente la première difficulté dans la mise en pratique de la modélisation de la dépendance.

Les graphiques suivants permettent d'appréhender la forme des dépendances qui existent d'une part entre l'indice action, l'indice hedge funds et les stratégies hedge funds et la structure de dépendance entre les différents stratégies hedge funds d'autre part.

Outre le sens et l'intensité des dépendances, ces graphiques nous donnent un premier renseignement sur la dépendance de queue qu'on va traiter ultérieurement dans un autre paragraphe.

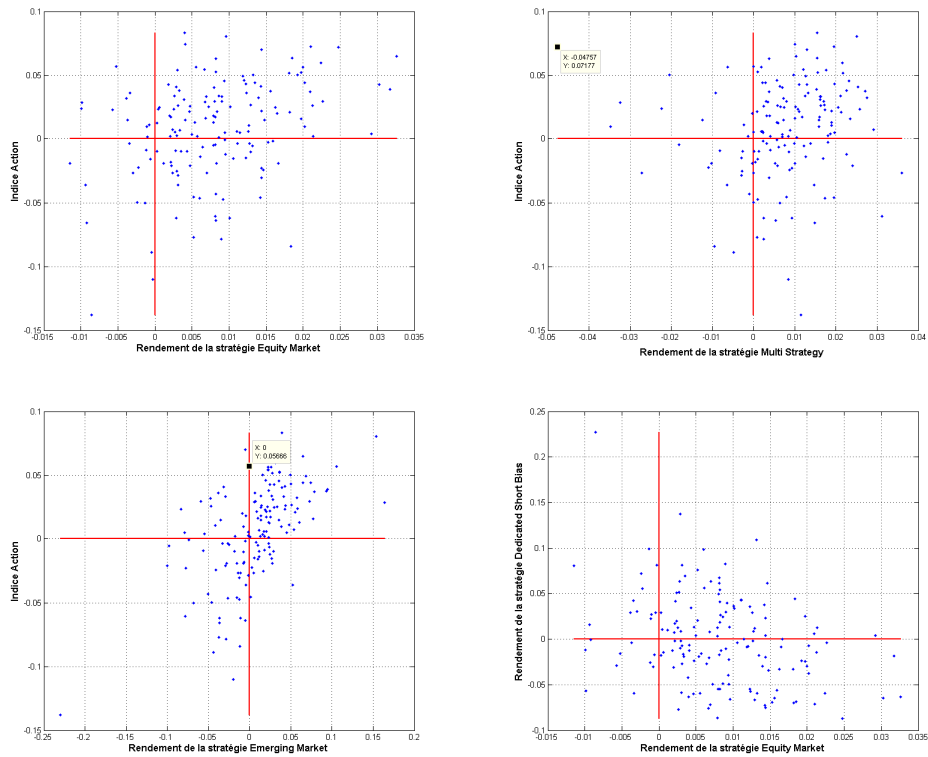


Le nuage de points est très proche de la première bissectrice. Il s'agit d'une dépendance positive entre l'indice action et l'indice hedge funds. On remarque que le nuage de points est très concentré sur les 2 cadrans de la première bissectrice.



Le nuage de points est très proche de la deuxième bissectrice. La queue de distribution supérieure est très concentrée.

On note bien que la dépendance entre l'indice 'action' et l'indice 'dedicated short' est une dépendance négative. En effet, par définition, cette stratégie consiste à maintenir une position courte sur les actifs.



la copule gaussienne a été retenue pour appréhender la nature de dépendance entre l'indice actions et les indices hedge funds.

On a eu recours dans cette partie à la méthode IFM (Inference Functions for Margins) ou méthode des fonctions d'inférence des marginales, méthode d'estimation paramétrique proposée par **Shih & Louis (1995)**, pour estimer les paramètres des copules et qu'on a développé dans une section précédente. En premier lieu, on estime les paramètres des marginales par la méthode de maximum de vraisemblance puis on introduit ces estimateurs dans la partie copule de la fonction log-vraisemblance pour déterminer le paramètre de la copule.

Le tableau ci-dessous regroupent les valeurs des paramètres des copules estimés.

Paramètres des copules

	Indice actions
Indice hedge funds	0.5516
Stratégie dedicated short	-0.7421
Stratégie equity market	0.3161
Stratégie muti Strategy	0.2560
Stratégie emergent markets	0.5781

Paramètres des copules

	Stratégie dedicated short
Stratégie equity market	-0.2976
Stratégie muti Strategy	-0.111
Stratégie emergent markets	-0.5522

Paramètres des copules

	Stratégie muti Strategy
Stratégie dedicated short	-0.5522
Stratégie equity market	0.3170

La copule gaussienne a été retenue pour appréhender la nature de dépendance entre l'Indice action et l'indice Hedge funds d'une part et l'indice action avec les stratégies equity market, multi-strategy, dedicated short, emergent market et la dépendance qui existe entre les diverses stratégies des hedge funds les unes par rapport aux autres.

On constate une dépendance positive entre l'indice action et l'indice hedge funds d'une part et l'indice action avec les stratégies equity market, multi-strategy. Cependant l'intensité de cette dépendance diffère d'une stratégie à l'autre.

On remarque une dépendance négative entre l'indice 'action' et l'indice 'dedicated short'. La queue de distribution supérieure est très concentrée et une dépendance négative entre la stratégie 'dedicated short' et les autres stratégies hedge funds cependant une dépendance positive entre la stratégie equity market et multi-strategy.

Le graphique suivant présente la copule empirique modélisant la dépendance entre l'indice hedge funds (IHF) et l'indice action et la copule paramétrique permettant l'ajustement de la copule empirique à celle normale du paramètre $\alpha = 0.5516$ estimé par la méthode IFM et la méthode du maximum de vraisemblance.

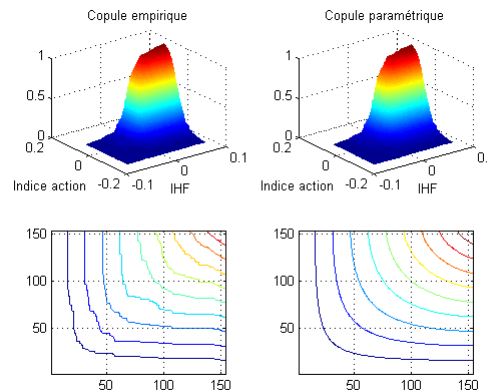


FIG. 2 – Copule empirique versus copule paramétrique pour l'indice hedge funds (IHF) et l'indice action

Le graphique ci-dessous illustre la densité de la copule modélisant la dépendance entre l'indice action et l'indice hedge funds. On note une forte surpondération dans la queue de distribution supérieure, et à un degré moindre dans la queue de distribution inférieure.

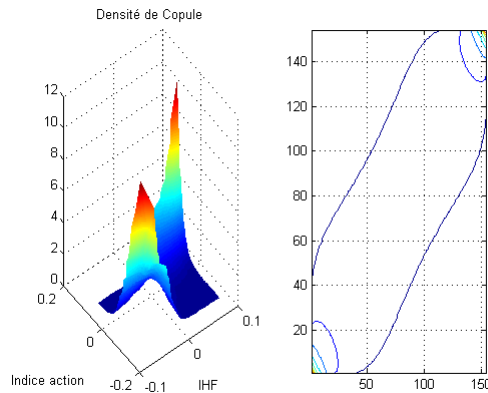


FIG. 3 – Densité de la copule indice hedge funds (IHF)- indice action

3.3 Modélisation de la dépendance sur la sous période 'Janvier 2000-Décembre 2002'

Pour tenter de répondre à la question du changement de la structure de dépendance dans le cas où la tendance du marché est baissière, une première possibilité est d'estimer les paramètres des copules bivariées existantes entre l'indice action et les indices hedge funds via la méthode Inference Functions for Margins.

On retrouve donc, comme précédemment, que globalement c'est la copule normale qui modélise le mieux la structure dépendance entre indice action, stratégies hedge funds et l'indice hedge funds mais cette modélisation apporte une information sur l'évolution du degré de dépendance en fonction de la tendance du marché.

Le tableau suivant présente les différentes valeurs des paramètres des copules estimés.

Paramètres des copules

	Indice actions
Indice hedge funds	0.4010
Stratégie dedicated short	-0.8819
Stratégie equity market	-0.1517
Stratégie muti Strategy	0.5166
Stratégie emergent markets	0.7949

Paramètres des copules

	Stratégie dedicated short
Stratégie emergent markets	-0.80

Paramètres des copules

	Stratégie equity market
Stratégie muti Strategy	-0.3571

On remarque que, le paramètre de la dépendance a augmenté pour les copules gaussiennes entre l'indice action d'une part et les stratégies 'dedicated short', 'multi strategy' et 'emergent

market' d'autre part ainsi que pour les copules gaussiennes modélisant la dépendance entre ces stratégies. Or plus, ce paramètre est élevé, plus grande est la dépendance. Cela signifie donc que l'indice action, la stratégie 'dedicated short' et la stratégie 'emregent market' sont de plus en plus dépendants lorsque la tendance du marché est baissière.

Cependant, en période 'normale', la dépendance entre l'indice action et la stratégie 'equity market' a été une dépendance positive mais le sens de dépendance a varié en une dépendance négative lorsque un événement extrême est survenu (11 Spetembre 2001). Il en ai de même pour le sens de de dépendance entre la stratégie 'equity market' et la stratégie 'multi-strategy'.

3.4 VaR bidimensionnelle

Le recours aux copules nous permet de tracer les "courbes de niveau" de la VaR bidimensionnelle et d'examiner pour un niveau de seuil donné, le taux marginal de substitution entre les VaR des deux risques univariés.

En effet, étant donné les distributions marginales des rendements des différents stratégies hedge funds, et l'indice action, il est possible de tracer les courbes de niveau correspondant aux copules minimale (contre- monotonie), maximale(co- monotonie) et la copule d'indépendance. Soient r_A et r_B les rendements des séries A et B . Notons par F_A et F_B les fonctions de répartition univariées des rendements. On peut écrire, pour tout seuil $\alpha \in [0, 1]$:

$$\{(r_A, r_B); \max(F_A(r_A) + F_B(r_B) - 1, 0) = \alpha\}, \text{ contre - monotonie};$$

$$\{(r_A, r_B); F_A(r_A) \cdot F_B(r_B) = \alpha\}, \text{ indpendance};$$

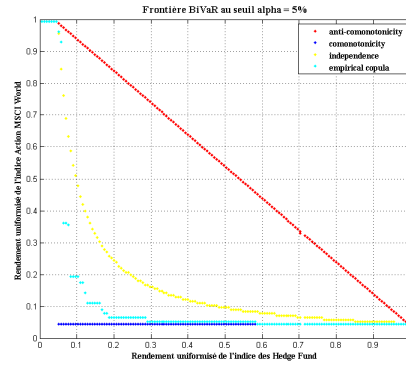
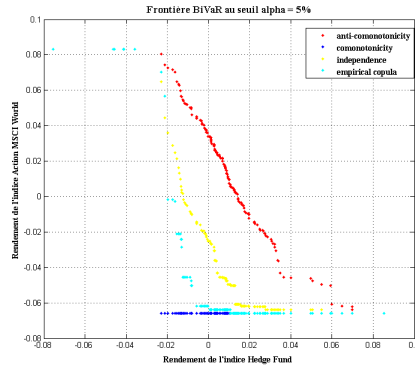
$$\{(r_A, r_B); \min(F_A(r_A), F_B(r_B)) = \alpha\}, \text{ co - monotonie}.$$

Les courbes de niveau empiriques issues de la copule empirique :

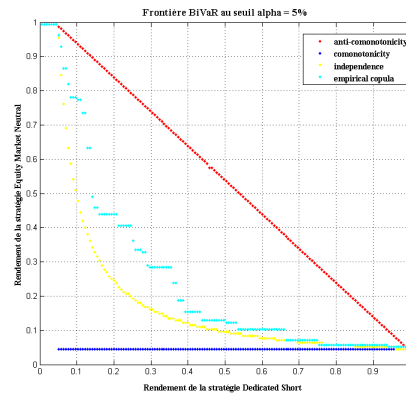
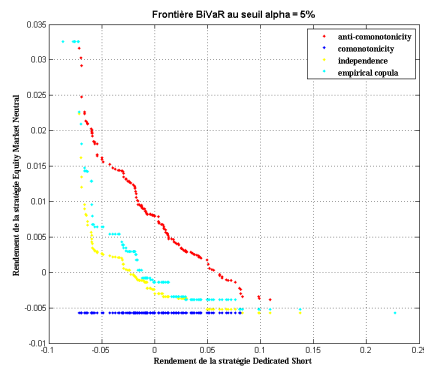
$$\{(r_A, r_B); C(F_A(r_A), F_B(r_B)) = \alpha\}$$

Les courbes de niveau permettent de déterminer le TMS entre les deux VaR univariées. Plus la courbe de niveau empirique est élevée se rapprochant du cas contre- monotone, plus la dépendance entre les rendements A et B est négative et plus l'effet compensation joue. Alors que plus les courbes se rapprochant de leur limite inférieure, correspondant au cas co-monotone ou de dépendance positive, et plus les rendements tentent à évoluer dans le même sens, la dépendance entre les pertes(corrélation) est en conséquence très élevée. Pour les courbes de niveau produit correspondent à la diversification.(cherubini et Luciano [2001]).

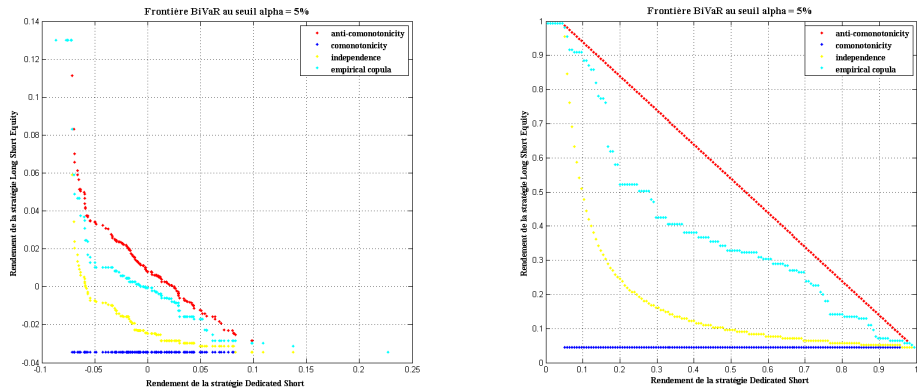
Nous allons déterminer les courbes de niveau à 95% de la VaR bidimensionnelle entre l'indice action et l'indice hedge funds ainsi que les courbes de niveau de de la VaR bidimensionnelle des différents stratégies hedge funds.



Nous constatons que la courbe de niveau 95% de la copule empirique se rapproche davantage de celle correspondant au cas co-monotonie (la limite inférieure) ou encore de dépendance positive. Il en résulte que les rendements de l'indice action et l'indice hedge funds évoluent dans le même sens et la "corrélacion" entre les pertes et par conséquent élevées.



On remarque que la courbe de niveau 95% de la copule empirique se rapproche plus de la courbe de niveau produit ou encore d'indépendance qui correspond à la diversification : les pertes de deux stratégies Dedicated short et Equity Market Neutral ne sont pas corrélées.



On constate que la courbe de niveau 95% de la copule empirique est élevée et elle se rapproche davantage à celle du cas contre-monotonie. En conséquence la dépendance entre les rendements de la stratégie Dedicated Short et Long Short Equity est négative et plus l'effet compensation joue.

On note que la perte potentielle maximale, calculée à travers la mesure de risque la VaR est plus élevée dans le cas dépendant par rapport au cas d'indépendance.

3.5 Dépendance de queue : mesures de dépendance χ et $\bar{\chi}$

L'étude de la dépendance de queue nous permet de décrire la dépendance au niveau des queues de distribution et d'examiner la survenance simultanée de valeurs extrêmes. On présentera deux coefficients de dépendance de queue nous permettant de mesurer la dépendance asymptotique entre les stratégies hedge funds et l'indice action.

Les mesures de dépendance χ et $\bar{\chi}$ ont été introduites par *Coles et al. (1999)*. Après avoir transformé le couple (X, Y) qui constituent les deux séries à étudier, en (U, V) dont les distributions marginales sont des lois uniformes, on a :

$$Pr\left(V > u | U > u\right) = 2 - \frac{1 - Pr(U < u, V < u)}{1 - Pr(U < u)} \approx 2 - \frac{\log C(u, u)}{\log(u)}$$

Comme $u \rightarrow \infty$, il en découle que la mesure de dépendance $\chi(u)$ est définie comme :

$$\chi(u) = 2 - \frac{\log C(u, u)}{\log(u)} \text{ pour } 0 \leq u \leq 1.$$

La fonction $\chi(u)$ est donc une mesure de dépendance des quantiles.

Le signe de $\chi(u)$ nous permet de déterminer le sens de dépendance entre les variables étudiées associées au quantile d'ordre u .

- $\chi(u)$ est bornée ainsi :

$$2 - \frac{\log(2u - 1)}{\log(u)} \leq \chi(u) \leq 1$$

La borne inférieure est interprétée comme $-\infty$ pour $u \leq 1/2$, et 0 pour $u = 1$. L'unique paramètre de mesure de la dépendance des extrêmes est donné par :

$$\chi = \lim_{u \rightarrow 1} \chi(u).$$

- χ est la probabilité qu'une variable est extrême sachant que l'autre variable est déjà extrême.
 - Dans le cas où $\chi = 0$, les variables sont asymptotiquement indépendantes. Par conséquent il est nécessaire d'utiliser une mesure de dépendance complémentaire permettant de mesurer la dépendance entre les extrêmes en intégrant la classe des variables qui sont asymptotiquement indépendantes. Par analogie avec la définition de $\chi(u)$, la comparaison de la fonction jointe de survie et des fonctions marginales de survie du couple (U, V) , aboutit au résultat suivant :

$$\bar{\chi}(u) = \frac{2\log Pr(U > u)}{\log Pr(U > u, V > u)} - 1 = \frac{2\log(1-u)}{\log \bar{C}(u, u)} - 1 \text{ pour } 0 \leq u \leq 1,$$

Où $-1 < \bar{\chi}(u) < 1$ pour tout $0 \leq u \leq 1$.

Pour se concentrer sur les caractéristiques des extrêmes, on définit aussi :

$$\bar{\chi} = \lim_{u \rightarrow 1} \bar{\chi}(u)$$

Les mesures χ et $\bar{\chi}$ ont été définies par *Ledford & Tawn* pour caractériser le comportement joint de la dépendance des queues via η , le coefficient de la dépendance de queue et $L(t)$, la classe de dépendance :

$$\bar{\chi} = 2\eta - 1$$

$$\chi = \begin{cases} c & \text{si } \bar{\chi}=1 \text{ et } L(t) \rightarrow c > 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty, \\ 0 & \text{si } \bar{\chi}=1 \text{ et } L(t) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty, \text{ et si } \bar{\chi} < 1. \end{cases}$$

En guise de conclusion :

- $\chi \in [0, 1]$: la partie $(0, 1]$ correspond à une dépendance asymptotique ;
- $\bar{\chi} \in [-1, 1]$; la partie $[-1; 1)$ correspond à une indépendance asymptotique.

Par conséquent le couple $(\chi, \bar{\chi})$ nous permet d'avoir une idée globale sur la dépendance des extrêmes :

- $(\chi > 0; \bar{\chi} = 1)$ signifie une dépendance asymptotique, dans ce cas la valeur de χ et de $\bar{\chi}$ déterminent la force et la classe de dépendance ;
- $(\chi = 0; \bar{\chi} < 1)$ signifie une indépendance asymptotique.

Dans la pratique, on détermine en premier lieu la valeur de $\bar{\chi}$:

- $\bar{\chi} < 1 \Rightarrow$ indépendance asymptotique ;
- $\bar{\chi} = 1 \Rightarrow$ dépendance asymptotique, dans ce cas on doit estimer χ .

On a calculé le coefficient de dépendance de queue $\bar{\chi}$ afin d'examiner la survenance simultanée de valeurs extrêmes et mesurer la dépendance asymptotique entre l'indice action et l'indice hedge funds ainsi que la dépendance asymptotique entre l'indice action et la stratégie Dedicated Short .

Mesure $\bar{\chi}$

	Indice actions
Indice hedge funds	-0.015
Stratégie dedicated short	-0.0568

Les résultats qui sont regroupés dans le tableau ci-dessus, nous amène à constater que la valeur de $\bar{\chi}$ est < 1 pour l'indice action et l'indice hedge funds ainsi que pour l'indice action et

la stratégie Dedicated Short donc il existe une indépendance asymptotique entre l'indice action et l'indice Hedge funds d'une part et entre l'indice action et la stratégie Dedicated Short d'autre part : sachant une perte extrême pour l'indice action, il existe une probabilité nulle qu'une perte d'une intensité relativement comparable ait lieu concomitamment pour l'indice hedge funds et la stratégie Dedicated Short.

4 Conclusion

Le débat sur la gestion alternative s'étend aujourd'hui de plus en plus dans la vie des institutions financières. Face à l'environnement en perpétuelle mutation, les gérants des fonds alternatifs sont appelés à s'y adapter en modélisant la structure de dépendance entre les différentes stratégies hedge funds les unes par rapport aux autres ainsi que par rapport au marché des actions.

C'est dans le cadre de la détermination des dépendances et des dépendances des queues entre les diverses stratégies hedge funds et le marché des actions et entre les stratégies hedge funds les unes par rapport aux autres ainsi que l'étude de l'impact d'une telle modélisation via la théorie des copules sur la Value at Risk bidimensionnelle, que se situe l'objectif de notre travail. En premier lieu nous avons fait un bref rappel des principaux résultats autour de la modélisation de la structure de dépendance par la théorie des copules.

Au cours de la deuxième partie et contrairement à ce que préconisent les gérants des fonds, on a mis en évidence un certain nombre de dépendances entre l'indice action et quelques stratégies hedge funds et entre ces différentes stratégies les unes par rapport aux autres. Le sens et l'intensité de ces dépendances s'aggravent pour certaines stratégies hedge funds lors d'une période de crise. Dans la mesure où on a repéré une augmentation du paramètre de la copule gaussienne entre l'indice action d'une part et les stratégies 'dedicated short', 'multi strategy' et 'emergent market' d'autre part ainsi que pour les copules gaussiennes modélisant la dépendance entre ces stratégies les unes par rapport aux autres. Ce qui nous a amené à constater que l'indice action, la stratégie 'dedicated short' et la stratégie 'emergent market' sont de plus en plus dépendants lorsque la tendance du marché est baissière. Pour certaines autres stratégies, le sens de dépendance a varié d'une dépendance positive en une dépendance négative en période de crise tel est le cas de l'indice action et la stratégie equity market d'une part et la stratégie equity market et la stratégie multi-strategy d'autre part.

Il est à signaler aussi que ce cas pratique montre que la prise en compte des dépendances entre les différentes stratégies hedge funds via la théorie des copules possède un énorme impact sur les mesures du risque tel que la VaR. Par ailleurs, la détermination des courbes du niveau de la VaR bidimensionnelle et l'étude de la survenance simultanée de valeurs extrêmes via des coefficients de dépendance des queues pourrait offrir aux gestionnaires des fonds alternatifs une estimation plus précise de risques sur les marchés financiers en présence de mouvements extrêmes d'une façon plus réaliste prenant en compte des dépendances de structure non linéaire.

Références

- [1] **Altman, E.I. (1993)**, *Corporate financial distress and bankruptcy*, Wiley New York.
- [2] **Anderson, C. W. et Nadarajah, S. (1993)**, *Environmental factors affecting reservoir safety*, Statistics for the Environment, Publié sous la direction de V. Barnett et de F. Turkman, Wiley New York, 163-182.

- [3] **Andersen P.K., Ekstrøm C.T., Klein J.P., Shu Y., Zhang M.-J. (2005)**, *A class of goodness of fit tests for a copula based on bivariate right-censored data*, *Biometric Journal* 47, 815824.
- [4] **Barbe P., Genest C., Ghoudi, K. & Rémillard B. (1996)**, *On Kendall's process*, *J. Multivariate Anal.* 58, 197229.
- [5] **Béliveau J. (2006)**, *Analyse Fréquentielle Multivariée De La Pointe, Du Volume Et De La Durée De La Crue*, Mémoire présenté à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval.
- [6] **Berg D., Bakken H. (2005)**, *A goodness-of-fit test for copulae based on the probability integral transform*, Technical Report SAMBA/41/05, Norsk Regnesentral, Oslo, Norway.
- [7] **Breymann W., Dias A., Embrechts P. (2003)**, *Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance*, *Quantitative Finance* 3, 114.
- [8] **Capocci D. (2004)**, *Introduction aux Hedge Funds*, Ed. Economica
- [9] **Capreraà P., Fougères A-L. & Genest C. (2000)**, *Bivariate distributions with given extreme value attractor*, *Journal of Multivariate Analysis*, 72, 30-49.
- [10] **Coles, S., J. Currie et J. Tawn (1999)**, *Dependence measures for extreme value analyses*, Department of Mathematics and Statistics, Lancaster University, Working Paper.
- [11] **Cossette H., Gaillardetz P., Marceau E. & Rioux J. (2002)**, *On two dependent individual risk models*, *Insurance : Mathematics and Economics* 30 (2002) 153166.
- [12] **Costinot, A., T. Roncalli et J. Teiletche (2000)**, *Revisiting the dependence between financial markets with copulas*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, Working Paper.
- [13] **Cui S., Sun Y. (2004)**, *Checking for the gamma frailty distribution under the marginal proportional hazards frailty model*, *Statistical Sinica*, 249267.
- [14] **Dakhli T. (2003)**, *Analyse de la dépendance de défaut et évaluation des dérivés de crédit sur portefeuille*, mémoire présenté devant HEC Montréal.
- [15] **De Haan L. & Rotzen H. (1993)**, *On the estimation of high quantiles*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 35 n°1, 1-13.
- [16] **Deheuvels.P (1979)**, *La fonction de dépendance empirique et ses propriétés Un test non paramétrique d'indépendance*, *Académie Royale de Belgique Bulletin de la Classe des Sciences* 5e Série, 65, 274-292.
- [17] **Denuit.M & Charpentier.A (2004)**, *Mathématiques de l'assurance non vie*, Tome 1, Economica.
- [18] **Denuit M. & Charpentier A. (2005)**, *Mathématiques de l'assurance non-vie. Tome 2 : tarification et provisionnement*, Paris : Economica.
- [19] **Dobrić J., Schmid F. (2005)**, *Testing goodness of fit for parametric families of copulas : Application to financial data*, *Communications in Statistics, Simulation and Computation*, 10531068.
- [20] **Dobrić J., Schmid F. (2007)**, *A goodness of fit test for copulas based on Rosenblatt's transformation*, *Computational Statistics & Data Analysis* 51, 46 46334642.
- [21] **Embrechts P., Kluppelberg C. & Mikosch T. (1997)**, *Modelling extremal events*, Berlin : Springer Verlag.
- [22] **Fermanian J.-D. (2005)**, *Goodness-of-fit tests for copulas*, *Journal of Multivariate Analysis* 95, 119152.
- [23] **Frey, R. and McNeil, A. (2001)**, *Modelling dependent defaults*, Preprint, ETH Zurich, available from <http://www.math.ethz.ch/mcneil>.

- [24] **Galambos J. (1978)**, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, New York : John Wiley and Sons.
- [25] **Genest, C. et K. Ghoudi (1994)**, *Une famille de lois bidimensionnelles insolite*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 318, série I, 351-354.
- [26] **Genest.C, MacKay.R.J (1986)**, *The joy of copulas : Bivariate distributions with uniform marginals*, The American Statistician, 40, 280-283. Genest, C. and
- [27] **Genest C. Rémillard, B. (2005)**, *Parametric bootstrap and pseudoobservations*, Mimeo.
- [28] **Genest C., Rémillard B. (2008)**, *Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing in semiparametric models*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques (in press).
- [29] **Genest C., Quessy J.F. et Rémillard B. (2006)**, *Goodness-Of-Fit Procedures For Copula Models Based On The Probability Integral Transformation*, Scandinavian Journal of Statistics.
- [30] **Geofroy, J. (1958)**, *Contribution à la théorie des valeurs extrêmes*, Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris, 7, 37-185.
- [31] **Ghoudi K., Khoudraji A. & Rivest L.P. (1998)**, *Propriétés statistiques des copules de valeurs extrêmes bidimensionnelles*, The Canadian Journal of Statistics Vol. 26, No. 1, pp. 187-197.
- [32] **Ghoudi K., Rémillard B. (2004)**, *Empirical processes based on pseudo-observations, II. The multivariate case*. In : Asymptotic Methods in Stochastics. In : Fields Inst. Commun., vol. 44. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 381-406.
- [33] **Glidden D.V. (1999)**, *Checking the adequacy of the gamma frailty model for multivariate failure times*, Biometrika 86, 381-393.
- [34] **Giesecke, K. (2001)**, *Structural modelling of defaults with incomplete information*, Manuscript.
- [35] **Gillet A. & Benjamin S. (2006)**, *Effets de la dépendance entre différentes branches sur le calcul des provisions*, Thème ASTIN : Contrôle des risques.
- [36] **Gumbel E. J. (1958)**, *The Statistics of Extremes*, New York : Columbia University Press.
- [37] **Joe, H. (1997)**, *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman Hall, London.
- [38] **Junker M., May A. (2005)**, *Measurement of aggregate risk with copulas*, The Econometrics Journal 8, 428-454.
- [39] **Haan, L. de (1984)**, *A spectral representation for max-stable processes*, Ann. Prob. U, 1194-1204.
- [40] **Haan, L. de & Resnick, S. (1977)**, *Limit theory for multivariate sample extremes*, Z. Wahr. v. Geb. 40, 317-337.
- [41] **Klugman S., Parsa R. (1999)**, *Fitting bivariate loss distributions with copulas*, Insurance Mathematics Economics 24, 139-148.
- [42] **Kotz, S., N. Balakrishnan et N.L. Johnson (2000)**, *Continuous Multivariate Distributions Volume 1 : Models and Applications*, John Wiley Sons, New York.
- [43] **Li, D.X. (2000)**, *On default correlation : a copula function approach*, Journal of Fixed Income.
- [44] **Malevergne Y., Sornette D. (2003)**, *Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependences*, Quantitative Finance 3, 231-250.
- [45] **Marceau.E (2006)**, *Modèles et méthodes actuariales pour l'évaluation quantitative des risques*, Tome 2, ISFA.

- [46] **Marshall, A.W. Olkin, I. (1967)**, *A multivariate extremal distribution*, J. Am. Statist. Assoc. 62, 30-44.
- [47] **Merton, R.C. (1973)**, *On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates*, MIT.
- [48] **Nelsen.R (1998)**, *An Introduction to copulas*, New York : Springer.
- [49] **Panchenko V. (2005)**, *Goodness-of-fit test for copulas*, Physica A 355, 176182.
- [50] **Pickands J. (1975)**, *Statistical inference using extreme order statistics*, Ann. Statist, 3, 119-131.
- [51] **Pickands, J. (1981)**, *Multivariate extreme value distributions*, In Proc. 43rd Session I.S.I. (Buenos Aires), pp. 859-878.
- [52] **Planchet F. (2007)**, *Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans un contexte de Solvabilité II*, ISFA.
- [53] **Planchet.F (2006)**, *Introduction à la théorie des copules*, ISFA.
- [54] **Resnick S. & Starica C. (1997)**, *Smoothing the Hill estimator*, Advanced Applied Probabilities, 29, pp. 271- 293.
- [55] **Tawn, J.A. (1988)**, *Bivariate extreme value theory : models and estimation*, Biometrika, 75, 397-415.
- [56] **Therrond.P (2006)**, *Analyse de la dépendance*, ISFA.
- [57] **Tiago de Olivera, J. (1958)**, *Extremal distributions*, Revista da Fac. Ciencias, Univ. Lisboa, A8, 299-310.
- [58] **Tiago de Oliveira, J. (1980)**, *Bivariate extremes : models and foundations. In Multivariate Analysis*, Ed. P.R. Krishnaiah, pp. 349-3156. Amsterdam : North Holland.
- [59] **Tiago de Oliveira, J. (1984)**, *Bivariate models for extremes. In Statistical Extremes and Applications*, Ed. J . Tiago de Oliveira, pp. 131-153. Dordrecht : Reidel.
- [60] **Rémillard, B. and Quessy, J.F. (2003)**, *Goodness-of-fit Procedures for Copula Models Based on the Integral Probability Transformation*, Groupe d'études et de recherche en analyse des décisions.
- [61] **Resnick, S.I. (1987)**, *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, New York : Springer-Verlag.
- [62] **Rosenblatt M. (1952)**, *Remarks on a multivariate transformation*, Annals of Mathematical Statistics 23, 470472.
- [63] **Scaillet O. (2007)**, *Kernel based goodness-of-fit tests for copulas with fixed smoothing parameters*, Journal of Multivariate Analysis 98, 533543.
- [64] **Shih J.H. (1998)**, *A goodness-of-fit test for association in a bivariate survival model*, Biometrika 85, 189200.
- [65] **Sibuya, M. (1960)**, *Bivariate extreme statistics*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 11, 195-210.
- [66] **Sklar, A. (1959)**, *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'institut de statistique de l'Université de Paris, 8, 229-231.
- [67] **Smith R.L., Tawn J.A. & Yuen H.K. (1990)**, *Statistics of Multivariate Extremes*, International Statistical Review Vol. 58, No. 1, pp. 47-58.
- [68] **Schonbucher, P. and Schubert, D. (2001)**, *Copula-dependent default risk in intensity models*, Preprint.

- [69] **Wang, W. Wells, M. T. (2000)**, *Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data*, J. Amer. Statist. Assoc. 95, 62-76. With a comment by Edsel A. Peña and a rejoinder by the authors.
- [70] **Wilson, T. (1997)**, *Portfolio Credit Risk (I)*, Risk.